

Dæmpet harmonisk oscillator

Mads Bertelsen, Nadja Frydenlund og Pia Jensen

21. november 2007

1 Formål

Formålet med denne øvelse var at studere den harmonisk oscillator – her en spiralfjeder med et lod. Vi skal med en opstilling med fjederen og strain-gauges se på loddets bevægelse når vi sætter dette i svingninger.

Vi vil i rapporten gennemgå forsøg med naturlig dæmpning, hastighedsproportional dæmpning og dæmpning med konstant friktion.

2 Teori

Teorien bag dette forsøg er gennemgået i dybden i forsøgsvejledningen, men vi vil lige her referere til hvad vi vil bruge mest igennem rapporten. En fjeder der er i en svingning uden dæmpning følger ligningen

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2.1)$$

hvor vinkelfrekvensen er givet ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.2)$$

hvor k er fjederkonstanten og m er massen af det lod der hænger i fjederen. Ud fra denne bliver svingningstiden (for en periode) givet ved

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.3)$$

En harmonisk oscillator med hastighedsproportional dæmpning, som for eksempel luftmodstand, vil følge denne ligning for dens udstrækning:

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\omega_d t + \phi), \quad (2.4)$$

hvor frekvensen er givet ved

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/2\omega_0)^2}, \quad (2.5)$$

hvor friktionskonstanten $\gamma = b/m$. Dette svarer til svingningen i (2.1), men nu dæmpes svingningen af et led $\exp(-\frac{\gamma t}{2})$.

En harmonisk oscillator med konstant friktion er for eksempel med tør gnidning. Teorien for denne er vist i vejledningen – hvad vigtigt er at dæmpningen for den tørre gnidning som funktion af tiden er lineær, hvilket vi senere vil vise for vores forsøg.

3 Forsøget

3.1 Måling af fjederkonstant

Fjederkonstanten skulle vi finde for at kunne komme med et teoretisk bud på svingningstiden for vores lod. For at finde denne skulle vi lave en statisk måling, og til dette brugte vi Hookes lov

$$F_H = -kx, \quad (3.6)$$

hvor F_H er den kraft som fjederen trækker tilbage med, k er fjederkonstanten og x er det stykke fjederen trækkes (eller skubbes). For at kunne udnytte dette satte vi fjederen op i opstillingen og målte hvor lang den var når den bare hang med sin egen vægt. Derefter satte vi et lod med en kendt masse på og målte endnu engang længden af fjederen. Derefter satte vi et nyt lod med en anden masse på og målte igen længden af fjederen.

Vi kan ved hjælp af

$$F_t = mg \quad (3.7)$$

finde den kraft som vi trækker i fjederen med (ved at indsætte massen m af loddet), og derfra finde fjederkonstanten k fra formel (3.6).

Vores målinger var som følger:

Δx	m	F_t	k
0.098 ± 0.004 m	46 ± 1 g	0.45 ± 0.01 N	4.6 ± 0.3 N/m
0.077 ± 0.004 m	35 ± 1 g	0.34 ± 0.01 N	4.5 ± 0.4 N/m

Gennemsnittet af disse to målinger er altså en fjederkonstant k på 4.6 ± 0.3 N/m (usikkerheder er udregnet med max-min metoden). Dette giver os en teoretisk frekvens på svingingerne til at være som følger efter (2.2):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} = 1.70 \pm 0.08 s^{-1}. \quad (3.8)$$

3.2 Udførelse af forsøget

Fælles for de tre delforsøg var at vi havde fjederen hængende i en opstilling hvor strain-gauges kunne måle svingingerne af fjederen, hvorefter vi kunne få output til en computer med LabView.

3.2.1 Naturlig dæmpning

For forsøget med den naturlige dæmpning skulle vi bare have en lod (med en kendt masse målt til $46 \text{ g} \pm 1 \text{ g}$) hængende i fjederen, for derefter at sætte den i svingninger. Vi kunne så se på hvordan svingningen blev dæmpet naturligt af luftmodstanden og den indre friktion i fjederen.

3.2.2 Hastighedsproportional dæmpning

For forsøget med luftmodstand satte vi en speciel pap-plade på vores lod (denne blev vejjet til at have en masse på $7 \text{ g} \pm 1 \text{ g}$), så der var større luftmodstand når loddet svingede op og ned. Dette dæmpede svingningen hastighedsproportionalt – da luftmodstand jo er hastighedsproportional.

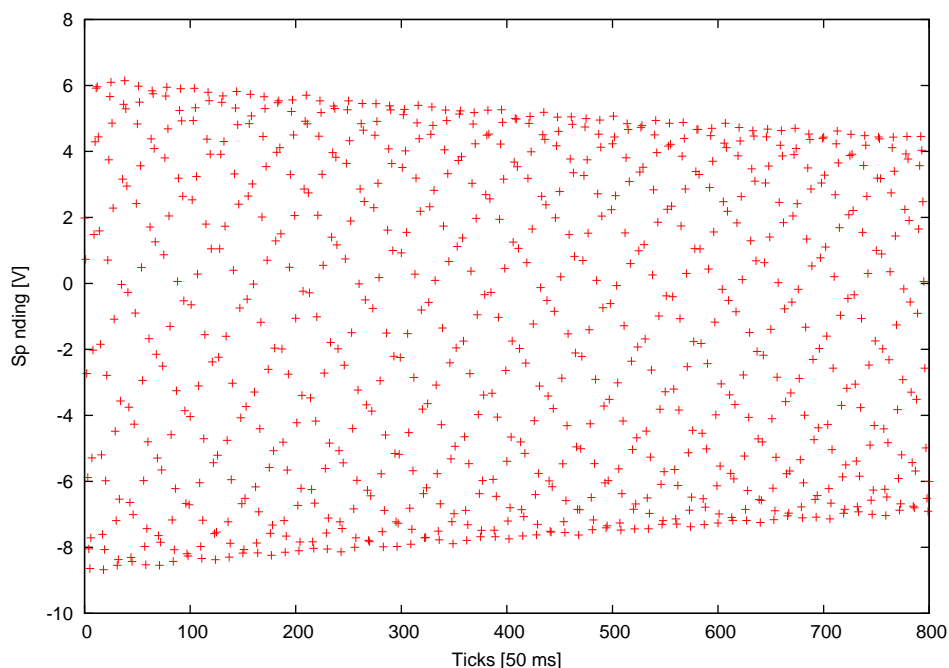
3.2.3 Dæmpning grundet tør gnidning

I det sidste delforsøg skulle vi så sætte loddet til at svinge op og ned ad en plade ved siden af fjederen, så svingningen blev dæmpet af friktion.

4 Databehandling

4.1 Naturlig dæmpning

Under forsøget med naturlig dæmpning fik vi målinger af svingningen som på Figur 1.

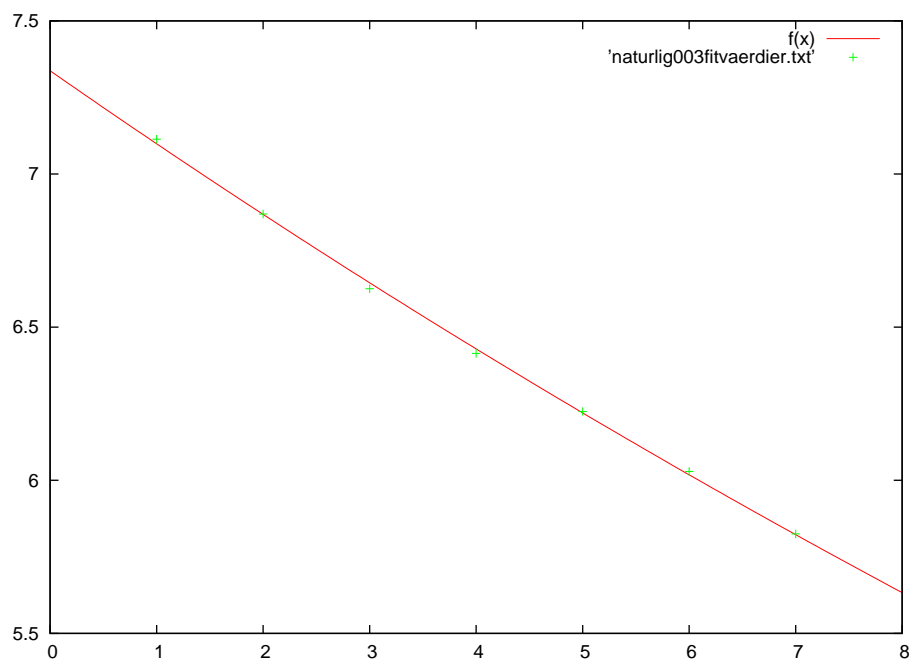


Figur 1: Data for naturligt dæmpet svingning.

Man kan her se hvordan amplituden lige så stille falder – hvorfor det også er tydeligt at der ikke er tale om en fri oscillator som er beskrevet med

formelen (2.1). Vi vil finde gennemsnitsamplituden i nogle små intervaller og derefter se om der er tale om en lineær eller eksponentiel sammenhæng af disse – for at se om det er gnidning (lineær sammenhæng) eller luftmodstand (eksponentiel sammenhæng) der står for den største del af dæmpningen.

Vi fandt amplituderne for intervallerne [100; 150], [200; 250], [300; 350], [400; 450], [500; 550], [600; 650], og [700; 750], og disse er benævnt med henholdsvis 1, 2, ..., 7 i grafen for amplituderne på Figur 2.



Figur 2: Amplituder for naturligt dæmpet svingning.

Vi har her et ret tæt udsnit af grafen, så det er ikke nemt at se at vores fit-linie faktisk er en eksponentiel kurve. I og med at amplituderne følger en eksponentiel udvikling har vi kunnet konstatere at den naturlige dæmpning primært er luftmodstand – da dette er en hastighedsproportional dæmpning. Der er sikkert også en indre friktion i fjederen, men den bliver overskygget af luftmodstanden.

Frekvensen finder vi ved at sige

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.9)$$

men da vores tid er i ticks og ikke sekunder laver vi en omregningsfaktor som følger, da vi ved at et tick er 50 ms:

$$f = 3.183 \cdot b, \quad (4.10)$$

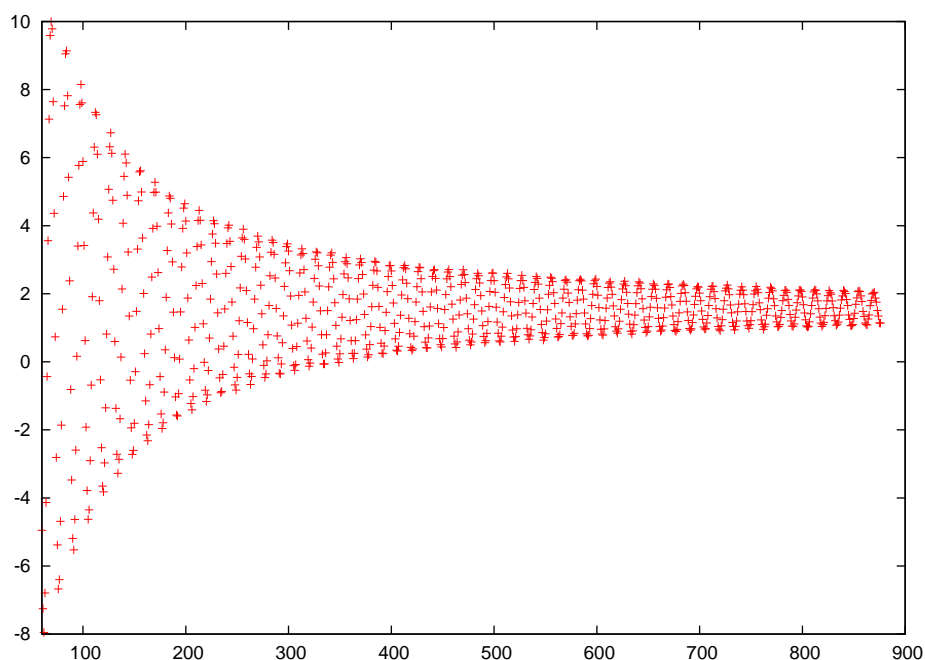
hvor b er den værdi vi får for ω_0 i vores fit. Vi finder værdien b som et gennemsnit af de forskellige fits vi har lavet på vores data – og i stedet for at finde usikkerheden med max-min har vi vurderet en usikkerhed ud fra GNUplots data for fittet og lagt lidt til for at være sikre. Denne b -værdi ender med at være 0.4748 ± 0.0002 rad/tick. Med vores omregningsfaktor (hvor vi bruger max-min for at finde usikkerheden igen) bliver dette til en frekvens på

$$f = 1.511 \pm 0.0006 s^{-1}. \quad (4.11)$$

Dette er ikke tæt nok på den teoretiske værdi af frekvensen til at være inden for den fundne usikkerhed på samme. Dette skyldes at den usikkerhed vi har på ovenstående jo bare er den matematiske usikkerhed som GNUplot har givet os (da denne jo regner med at vores måledata er perfekte), derfor skal vi også tænke over at der skal lægges en fysisk usikkerhed oven i – som er en del større end den har fundne.

4.2 Hastighedsproportional dæmpning

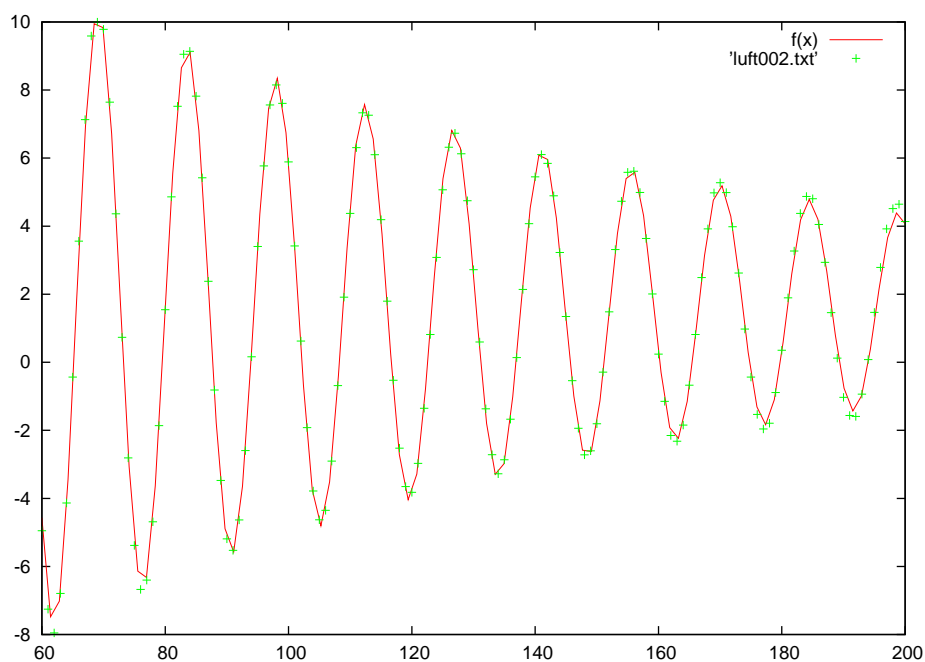
Under forsøget med luftmodstand fik vi vores data i Figur 3.



Figur 3: Data for dæmpning på grund af luftmodstand.

Eftersom vi vil se på dæmpningen hvor det primært er luftmodstand der dæmper svingningen, plotter vi vores data ind med en logaritmisk y-

akse. Her skulle den eksponentielle del af vores data gerne vise sig at falde som en ret linie (toppene af bølgerne falder ret nedad), og vi vælger kun at se på intervallet $[60; 200]$. Efter dette interval er hastigheden ikke nok til at luftmodstanden er dominerende, og dæmpningen er ikke egentlig eksponentiel mere. Vi fittede nu dette interval med sammenhængen (2.4), og fik som på Figur 4.



Figur 4: Fit linie for dæmpning på grund af luftmodstand.

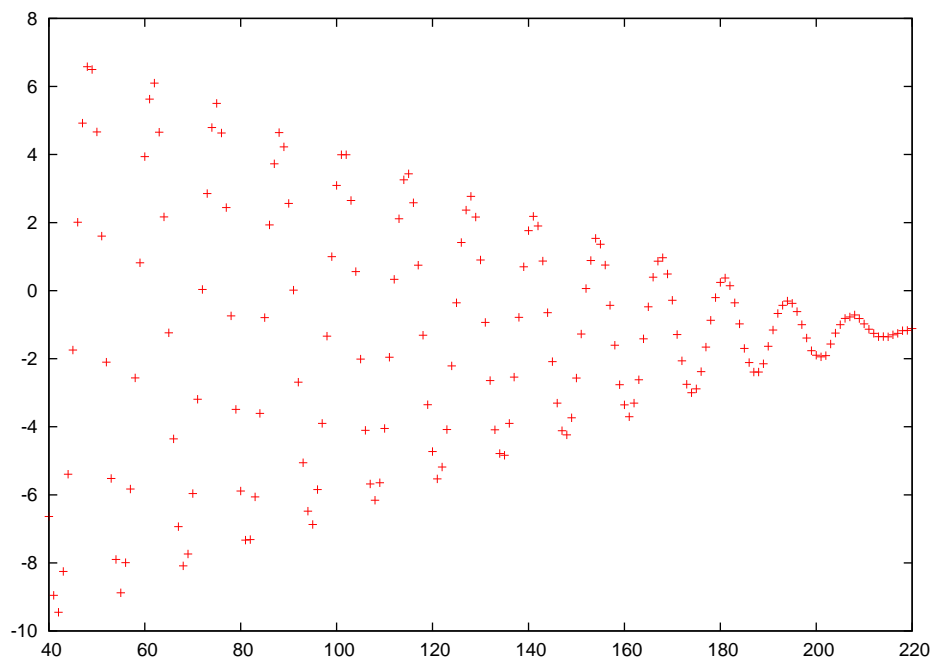
Hvad vi har fået ud af dette fit var først og fremmest et udtryk for dæmpningen givet som $\exp(-kx)$, hvor k er dæmpningskonstanten. Ud fra vores fit fik vi $k = 0.00868042 \pm 9.208 \times 10^{-5} \text{m}^{-1}$. Derudover fik vi endnu engang et udtryk for b , der kunne give os frekvensen ved samme udregning som for den naturlige dæmpning. Denne værdi for b var $0.435917 \pm 9.585 \times 10^{-5} \text{ rad/tick}$. Frekvensen bliver ud fra dette:

$$f = 1.3875 \pm 3 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}. \quad (4.12)$$

Igen bør vi her tænke over at den usikkerhed vi har her kun giver den usikkerhed som GNUplot har givet os – vi bør altså lægge en større fysisk usikkerhed oveni (som vil afhænge af måleapparatet). Det skal bemærkes at værdien her ovenfor over hovedet ikke er inden for den usikkerhed som vi har fundet den teoretiske frekvens med.

4.3 Dæmpning grundet tør gnidning

Under delforsøget med tør gnidning fik vi dati vist i Figur 5.



Figur 5: Oversigt over data for dæmpning pga. tør gnidning.

Disse kunne vi fitte med funktionen

$$f(x) = a \cdot (1 - k \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x + c) + d, \quad (4.13)$$

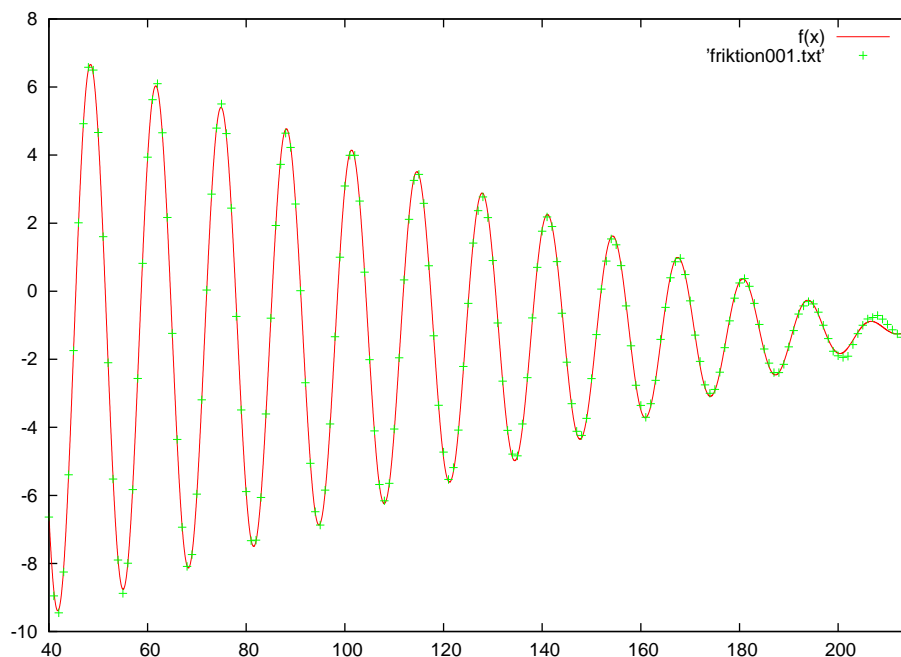
hvor dæmpningen her er $(1 - k \cdot x)$ med dæmpningskonstanten k . Denne funktion fittede vi hele vores måleserie med, og fik følgende som i Figur 6.

Dæmpningskonstanten k fik vi til at være $0.00467932 \pm 8.251 \times 10^{-6} \text{m}^{-1}$. Derudover fik vi en b -værdi på $0.474613 \pm 5.828 \times 10^{-5} \text{ rad/tick}$. Denne værdi for b giver os en frekvens på

$$f = 1.5107 \pm 2 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}. \quad (4.14)$$

Endnu engang får vi en frekvens der er meget mindre end den vi fandt teoretisk, igen på grund af usikkerhedsopgivelser.

I og med at vores fit-funktion passer så godt på vores data kan vi konkludere at der er tale om tør gnidning, der altså er lineært dæmpet.



Figur 6: Fit af data for dæmpning pga. tør gnidning.

5 Fejlkilder

Vi kender ikke målenøjagtighederne for vores måleapparat – hele computer-systemet med den stive fjeder som vores fjeder hang i, samt de strain-gauges vi brugte.

Med hensyn til selve opstillingen var der det problem at fjederen i stedet for at svinge præcist vertikalt også svingede lidt frem og tilbage horisontalt. Dette problem var størst når svingningerne var størst.

Fjedermassen kan også være en lille fejkilde – men da det er en fjeder med en så lille masse er denne fejkilde vurderet til at være ret lille. Vi har valgt ikke at tage fjedermassen med da vi udregnede den teoretiske svingningstid – vi burde nok have taget en tredjedel af fjedermassen med, men den rundede vi ned til 0.

6 Konklusion

Vi har fundet en teoretisk frekvens for en svingning og har derudover fundet tre værdier for en eksperimentiel frekvens. Disse tre frekvenser var mindre end den teoretiske – hvilket betyder at der har været en større dæmpning på

vores svingninger end den vi har kunnet se. I og med at de tre eksperimentielle målinger giver et nogenlunde ens resultat må vi kunne sige at forsøgene forløb godt.

For svingningerne med naturlig dæmpning og hastighedsproportional dæmpning kunne vi se at der var en eksponentiel dæmpningsfaktor som forudset, mens dæmpningen grundet tør gnidning var lineær som i teorien.